MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 14
3.2.2020

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Der allgemeine Ebenenpunkt von E_1 ist

$$\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}0\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u\\5v\\3+4v\end{pmatrix}, \qquad \text{mit } u, v \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun diesen in die Gleichung von K ein, so erhalten wir eine Gleichung einer ebenen Quadrik Q_1 in den Koordinaten u und v. Es ist

$$\begin{pmatrix}u\\5v\\3+4v\end{pmatrix} \in K \cap E_1 \iff u^2 + (5v)^2 - (3+4v)^2 = 0. \qquad (*_1)$$

Q_1 und $K \cap E_1$ sind vom selben Typ, also bestimmen wir die affine Normalform von Q_1:

$$\begin{aligned}(*_1) &\iff u^2 + 25v^2 - (9 + 24v + 16v^2) = 0\\ &\iff u^2 + 9v^2 - 24v - 9 = 0\\ &\iff u^2 + 9\left(v^2 - \frac{24}{9}v + \left(\frac{12}{9}\right)^2 - \left(\frac{12}{9}\right)^2\right) - 9 = 0\\ &\iff u^2 + 9\left(v - \frac{4}{3}\right)^2 - 16 - 9 = 0\\ &\iff u^2 + 9\left(v - \frac{4}{3}\right)^2 = 25\\ &\iff \left(\frac{1}{5}u\right)^2 + \left(\frac{3}{5}v - \frac{4}{5}\right)^2 = 1\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{5}u\\ \frac{3}{5}v - \frac{4}{5}\end{pmatrix}$ liefert $w^2 + z^2 = 1$, die affine Normalform einer **Ellipse**. Also ist Q_1, und damit $K \cap E_1$, eine Ellipse.

Genauso gehen wir bei der Ebene E_2 vor, welche die Lösungsmenge des LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 2\end{array}\right)$$

ist. Also ist

$$E_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},$$

und der allgemeine Ebenenpunkt von E_2 ist

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-v\\v\\u\end{pmatrix}, \qquad \text{mit } u, v \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun diesen in die Gleichung von K ein, so erhalten wir eine Gleichung einer ebenen Quadrik Q_2 in den Koordinaten u und v. Es ist

$$\begin{pmatrix}2-v\\v\\u\end{pmatrix} \in K \cap E_2 \iff (2-v)^2 + v^2 - u^2 = 0. \qquad (*_2)$$

Q_2 und $K \cap E_2$ sind vom selben Typ, also bestimmen wir die affine Normalform von Q_2:

$$\begin{aligned}
(*_2) &\iff 4 - 4v + v^2 + v^2 - u^2 = 0\\
&\iff 2v^2 - 4v - u^2 + 4 = 0\\
&\iff 2(v^2 - 2v + 1 - 1) - u^2 + 4 = 0\\
&\iff 2(v-1)^2 - u^2 - 2 + 4 = 0\\
&\iff 2(v-1)^2 - u^2 = -2\\
&\iff -(v-1)^2 + \frac{1}{2}u^2 = 1\\
&\iff -(v-1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}u\right)^2 = 1
\end{aligned}$$

Die Variablentransformation $\begin{pmatrix}w\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}u\\v-1\end{pmatrix}$ liefert $w^2 - z^2 = 1$, die affine Normalform einer **Hyperbel**. Also ist Q_2, und damit $K \cap E_2$, eine Hyperbel.

b) Da $K \cap E_1$ eine Ellipse ist, gilt nach Vorlesung für den Schnittwinkel φ_1 zwischen E_1 und der Symmetrieachse a von K, daß

$$\varphi_1 > \text{ Mittelpunktswinkel des Kreiskegels } = \alpha = 45^\circ.$$

Da $K \cap E_2$ eine Hyperbel ist, gilt nach Vorlesung für den Schnittwinkel φ_2 zwischen E_2 und der Symmetrieachse a von K, daß

$$\varphi_2 < \text{ Mittelpunktswinkel des Kreiskegels } = \alpha = 45^\circ.$$

Diese Winkelbeziehungen könnte man natürlich, da man ja E_j und a gegeben hat, auch direkt nachrechnen.

2. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Da die beiden Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}-\lambda\\0\\1\end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, und auf $\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix}$ senkrecht stehen, sind sie zwei linear unabhängige Richtungsvektoren der Ebene E_λ. Diese hat also die Parameterdarstellung

$$E_\lambda = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-\lambda\\0\\1\end{pmatrix},$$

und damit ist der allgemeine Ebenenpunkt von E_λ

$$\begin{pmatrix} 1+u-\lambda v \\ -u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \text{mit} \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun diesen in die Gleichung von K ein, so erhalten wir eine Gleichung einer ebenen Quadrik Q_λ in den Koordinaten u und v. Es ist

$$\begin{pmatrix} 1+u-\lambda v \\ -u \\ v \end{pmatrix} \in K \cap E_\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad (1+u-\lambda v)^2 + u^2 - 2v^2 = 0. \qquad (*)$$

Q_λ und $K \cap E_\lambda$ sind vom selben Typ, also bestimmen wir die affine Normalform von Q_λ:

$$\begin{aligned}
(*) &\Longleftrightarrow 1 + u^2 + \lambda^2 v^2 + 2u - 2\lambda v - 2\lambda uv + u^2 - 2v^2 = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2u^2 - 2\lambda uv + 2u + (\lambda^2 - 2)v^2 - 2\lambda v + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2u^2 - (2\lambda v - 2)u + (\lambda^2 - 2)v^2 - 2\lambda v + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2\Big(u^2 - (\lambda v - 1)u + \Big(\frac{\lambda v - 1}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{\lambda v - 1}{2}\Big)^2\Big) + (\lambda^2 - 2)v^2 - 2\lambda v + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2\Big(u - \frac{\lambda v - 1}{2}\Big)^2 - \frac{(\lambda v - 1)^2}{2} + (\lambda^2 - 2)v^2 - 2\lambda v + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2\Big(u - \frac{\lambda}{2}v + \frac{1}{2}\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(\lambda^2 v^2 - 2\lambda v + 1\Big) + \lambda^2 v^2 - 2v^2 - 2\lambda v + 1 = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2\Big(u - \frac{\lambda}{2}v + \frac{1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{\lambda^2}{2} - 2\Big)v^2 - \lambda v + \frac{1}{2} = 0 \qquad (+)
\end{aligned}$$

Nun ist Q_λ genau dann eine Parabel ist, wenn in $(+)$ das Glied v nur linear vorkommt. Also ist

$$Q_\lambda \ \text{Parabel} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\lambda^2}{2} - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \pm 2.$$

Damit ist auch $K \cap E_\lambda$ genau für $\lambda = \pm 2$ eine Parabel mit der affinen Normalform $w^2 - z = 0$, welche man im Fall $\lambda = \pm 2$ aus $(+)$ durch die Variablentransformation $\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}u - \frac{\sqrt{2}\lambda}{2}v + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda v - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ erhält.

Nur dann ist es möglich, ein sich schneidendes Geradenpaar als Kegelschnitt zu erhalten, wenn die Ebene E_λ durch den Ursprung geht. Dies ist aber für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ der Fall, denn der Ursprung liegt für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ auf E_λ, wie man aus der Koordinatengleichung für E_λ:

$$E_\lambda \ : \quad x + y - \lambda z = 1$$

sofort sieht.

[*Alternativ sieht man das auch aus* $(+)$, *denn im Fall* $\lambda \neq \pm 2$ *ergibt sich weiter*

$$\begin{aligned}
(+) \ &\Longleftrightarrow 2\Big(u - \frac{\lambda}{2}v + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{\lambda^2 - 4}{2}\Big(v^2 - \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 4}v + \Big(\frac{\lambda}{\lambda^2 - 4}\Big)^2 - \Big(\frac{\lambda}{\lambda^2 - 4}\Big)^2\Big) + \frac{1}{2} = 0 \\
&\Longleftrightarrow 2\Big(u - \frac{\lambda}{2}v + \frac{1}{2}\Big)^2 + \frac{\lambda^2 - 4}{2}\Big(v - \frac{\lambda}{\lambda^2 - 4}\Big)^2 - \frac{\lambda^2}{2(\lambda^2 - 4)} + \frac{1}{2} = 0,
\end{aligned}$$

und für kein $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist* $-\frac{\lambda^2}{2(\lambda^2-4)} + \frac{1}{2} = 0$, *was gelten müßte, damit man mit einer Variablentransformation die affine NF* $w^2 - z^2 = 0$ *eines sich schneidenden Geradenpaars erhalten könnte.*]

3. Eine kurze Lösung wäre:

Da der Punkt $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ nicht auf der Geraden g liegt, ist nach Vorlesung Q eine Parabel. ✓

Ohne die Kenntnis des Ergebnisses der Vorlesung argumentiert man so:

Es ist für $P = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in Q$

$$d(P, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})^2 = \left\| \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\|^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Wir bestimmen nun den Abstand von P zu g, also $d(P, g)$:
Sei P_0 der Lotfußpunkt von P auf g, also $P_0 = \begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\end{pmatrix} \in g$ mit $P - P_0 \perp \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Nun ist

$$\begin{aligned} P - P_0 \perp \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix}x-\lambda\\y+\lambda\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (x-\lambda) - (y+\lambda) = 0 \\ &\iff x - y = 2\lambda \\ &\iff \lambda = \frac{x-y}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist der Lotfußpunkt von P

$$P_0 = \begin{pmatrix}\frac{x-y}{2}\\-\frac{x-y}{2}\end{pmatrix},$$

und also

$$d(P,g)^2 = d(P,P_0)^2 = \left\| \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{x-y}{2}\\-\frac{x-y}{2}\end{pmatrix} \right\|^2 = \left(x - \frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{x-y}{2}\right)^2.$$

Wegen $Q = \left\{P = \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, \binom{1}{1}) = d(P,g)\right\}$ lautet also die Gleichung für Q dann

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \;=\; \left(x - \frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{x-y}{2}\right)^2. \qquad (*)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (*) &\iff (x-1)^2 + (y-1)^2 \;=\; \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-1)^2 \;=\; 2 \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-1)^2 \;=\; \frac{1}{2} \cdot (x+y)^2 \\ &\iff x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \;=\; \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2xy + y^2) \\ &\iff x^2 + y^2 - 2xy - 4x - 4y + 4 \;=\; 0 \\ &\iff x^2 - 2xy - 4x + y^2 - 4y + 4 \;=\; 0 \\ &\iff x^2 - (2y+4)x + \left(\frac{2y+4}{2}\right)^2 - \left(\frac{2y+4}{2}\right)^2 + y^2 - 4y + 4 \;=\; 0 \\ &\iff \left(x - \frac{2y+4}{2}\right)^2 - (y+2)^2 + y^2 - 4y + 4 \;=\; 0 \\ &\iff (x - (y+2))^2 - (y^2 + 4y + 4) + y^2 - 4y + 4 \;=\; 0 \\ &\iff (x - y - 2)^2 - 8y \;=\; 0. \end{aligned}$$

Die Variablentransformation

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - 2 \\ 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert weiter ...

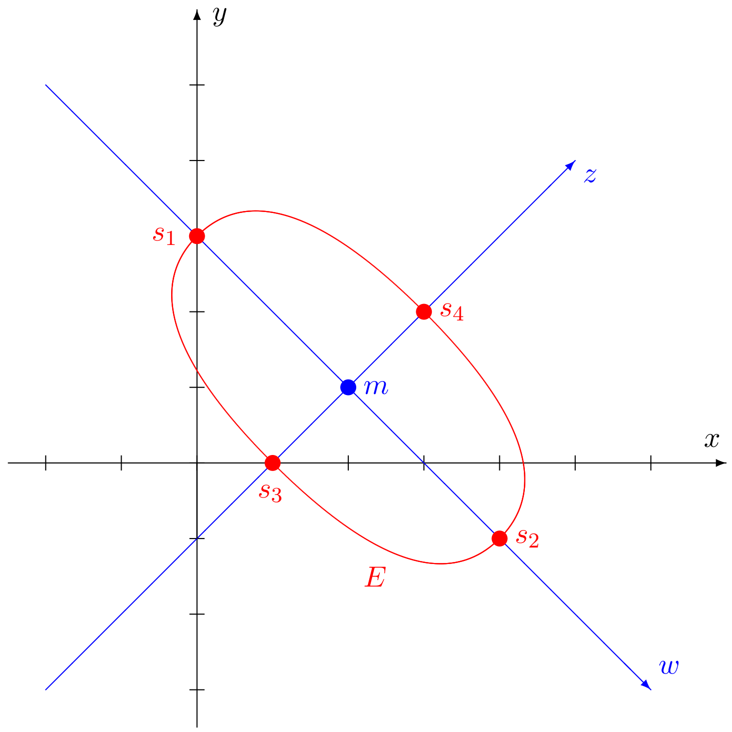
$$\ldots \iff w^2 - z = 0,$$

die affine Normalform einer Parabel. Also ist Q eine Parabel.

4. a) Für die im (x, y)–Koordinatensystem gegebene Ellipse E mit den Scheitelpunkten

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad s_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ergibt sich:



Damit besitzt die Ellipse E den Mittelpunkt

$$m = \frac{s_1 + s_2}{2} = \frac{s_3 + s_4}{2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie die beiden Hauptachsen

$$w = m + \mathbb{R} \cdot (s_2 - m) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

und

$$z = m + \mathbb{R} \cdot (s_4 - m) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

als Länge ihrer Hauptachsenabschnitte ergibt sich

$$\alpha = \|s_2 - m\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

und

$$\beta = \|s_4 - m\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Die Ellipse E besitzt also im (w, z)–Koordinatensystem die euklidische Normalform

$$\frac{w^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{w^2}{\sqrt{8}^2} + \frac{z^2}{\sqrt{2}^2} = 1.$$

b) Nach a) ist

$$E' = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{w^2}{8} + \frac{z^2}{2} = 1 \right\}$$

die euklidische Normalform von E. Da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Richtungsvektoren der großen und der kleinen Hauptachse von E sind, erhält man E' aus E also dadurch, daß man E zuerst um den Vektor $-m$ ($m=$ Mittelpunkt von E) verschiebt und anschließend um 45° gegen den Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht. Letzteres entspricht einer Multiplikation mit einer Drehmatix $P = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi = 45°$, also $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$.
Für die Bewegung

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - m \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

gilt dann $g(E) = E'$. Damit ist

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E \iff & g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \in E' \\
\iff & \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \in E' \\
\iff & \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}}\Big)^2 = 1 \\
\iff & \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 + 4\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}}\Big)^2 = 8 \\
\iff & (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}xy - 2\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}y) + 4 \cdot (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{2} + 2\frac{1}{2}xy - 2\frac{3}{2}x - 2\frac{3}{2}y) = 8 \\
\iff & \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3xy - 13x - 11y = -\frac{21}{2}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3xy - 13x - 11y = -\frac{21}{2} \right\},$$

und also

$$\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 3xy - 13x - 11y = -\frac{21}{2}$$

eine Gleichung für E.